Probabilités

I. Le hasard

NATURE

Les mathématiques ne disent pas grand chose du hasard. Elle ne prétendent pas en étudier la nature, mais seulement la structure. Comme souvent en science, des prétentions philosophiquement limitées offrent en contrepartie une redoutable efficacité. Toutefois, puisque « science sans conscience n'est que ruine de l'âme[1] », avant d'en venir aux probabilités, disons tout de même quelques mots du hasard.

FINALITÉ

Lorsqu'on parle de croire ou non au *hasard*, dans une conversation, il y est souvent question d'un hasard qui s'opposerait au *destin*. Affirmer dans ce contexte qu'il n'y a pas de hasard, ce serait dire que tous les événements d'une vie humaine ont une **finalité**, une « cause finale », fût-elle cachée ; qu'ils n'arrivent pas sans raison. Mettons cette question-là de côté, car nous n'avons pas l'ambition d'aborder ici la question du sens de la vie.

CAUSE

Le hasard dont nous voulons parler n'est pas seulement l'absence de finalité, mais, plus radicalement, l'absence totale de toute cause. Nul ne doute que bien des choses en ce monde soient déterminées. Mais le sont-elles toutes ? Existe-t-il, dans l'univers, des phénomènes

[1] Rabelais. *Pantagruel*, chapitre 8.

purement spontanés, qui surviennent sans la moindre cause ? Des phénomènes **contingents** ?

DÉTERMINISME

La physique classique, qui commence à s'élaborer à partir de Galilée, nous présente un univers où, des atomes aux étoiles, tout semble soumis à des lois constantes et universelles. Cela peut conduire à croire à un déterminisme radical, tel que formulé par Laplace :

> **Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des être qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.**[2]

Ce monde laplacien, où tout est théoriquement prévisible, ne laisse aucune place au *hasard pur* : selon ce point de vue, s'il n'est pas possible, dans la pratique, de prédire le résultat d'un jet de dé, c'est seulement parce qu'on ne peut connaître avec une précision suffisante la position et la vitesse de toutes les particules en jeu. On ne peut parler alors que de « *hasard-ignorance* ». Le déterminisme

[2] Pierre-Simon de Laplace. *Théorie analytique des probabilités*, 1812 (mais la citation n'apparaît je crois que dans la troisième édition, qui date de 1820). Notons le « comme le passé », qui met en évidence la réversibilité des lois envisagées par Laplace. Sa position strictement déterministe n'a absolument pas empêché Laplace de travailler à maintes reprises sur les probabilités.

laplacien a de redoutables conséquences **métaphysiques**, car non content d'exclure le hasard, il exclut en outre le **libre arbitre**[3].

DÉNI

Nombreux – et même largement majoritaires, me semble-t-il – furent les philosophes et savants qui, à travers l'histoire, ne crurent pas au « sans cause ». Et pourtant, l'avènement de la *physique quantique* a mis en évidence, au niveau des particules élémentaires, l'existence d'un hasard pur.

Cela fait presque un siècle[4], ce qui n'empêche pas que bien des gens éprouvent toujours des réticences à en prendre acte. Ils trouvent plus confortable de croire que ce prétendu *hasard* n'est que la manifestation des insuffisances de la théorie actuelle, dont une théorie ultérieure viendra combler les lacunes.

DÉS

Le mot *hasard* vient de l'arabe, *zahr* signifiant *fleur*. *Az-zahr* : jeu de dés, les dés ayant porté une fleur sur l'une de leurs faces.

Le mot *aléatoire*, qui signifie *soumis au hasard*, vient du latin *alea*, qui signifie aussi *dé*, comme dans la locution latine *alea jacta est* : le est jeté.

[3] Cela peut se discuter. Certains philosophes prétendent concilier déterminisme et libre arbitre. Par exemple : « On peut donc accorder que, s'il était possible pour nous d'avoir de la manière de penser d'un homme, telle qu'elle se montre par des actions internes, aussi bien qu'externes, une connaissance assez profonde pour que chacun de ses mobiles, même le moindre, fût connu en même temps que toutes les occasions extérieures qui agissent sur ces derniers, on pourrait calculer la conduite future d'un homme, avec autant de certitude qu'une éclipse de lune ou de soleil, et cependant soutenir en même temps que l'homme est libre. » Kant, *Critique de la Raison Pratique*.

[4] Je propose de dater cette prise de conscience de l'automne1927, période durant laquelle Einstein, dans des discussions quotidiennes avec Bohr et Heisenberg, exprima à plusieurs reprises son scepticisme par la formule : « Dieu ne joue pas aux dés ». Voir Heisenberg, *La Partie et le Tout*, fin du chapitre 6.

II. LE FORMALISME MODERNE

KOLMOGOROV

Le **formalisme** des probabilités, aujourd'hui pratiqué en mathématiques, pourra paraître artificiel au débutant. On le doit au mathématicien russe du XX[e] siècle, Andreï Kolmogorov. Le formalisme de Kolmogorov s'explique de trois façons :

ENSEMBLES

Tout d'abord, il est élaboré dans le langage moderne de la théorie des ensembles, théorie sur laquelle Kolmogorov a lui-même travaillé. Selon ce point de vue, qui est aujourd'hui le plus répandu, tout objet mathématique peut être vu comme un ensemble. Pas étonnant, donc, qu'un « événement » soit représenté par un ensemble.

LOI

Ensuite, c'est un choix de Kolmogorov, qui s'est avéré efficace, que de prendre comme point de départ, non pas la suite des résultats d'une expérience aléatoire, mais la probabilité en elle-même. L'idée est de ne pas partir de considérations statistiques (comme le firent certains prédécesseurs de Kolmogorov), mais de ce qu'on appellera une « loi de probabilité ». Cette loi de probabilité ne sera en général pas déduite d'informations antérieures, mais posée comme un point de départ antérieur à toute expérience. On lui demande de satisfaire à certaines conditions que Kolmogorov appelle *axiomes*.

INFINI

Enfin et surtout, il s'agit d'être en mesure de traiter des situations où il y a <u>une infinité de cas</u> possibles. Dans une telle situation, on ne peut pas considérer chaque cas isolément. Imaginons par exemple qu'on « tire au sort » un point dans un carré. Chaque point, noyé parmi une infinité d'autres, n'aura vraisemblablement qu'une chance sur une infinité d'être choisi. La probabilité qu'un point donné soit choisi est donc nulle. Or on ne peut pas dire qu'un tel événement est impossible, car il faut bien qu'un point soit choisi. Mais le vrai problème est surtout que, pour connaître la probabilité que le point choisi soit situé sur une zone donnée du carré, il faudrait additionner une infinité de zéros, ce qui ne donnerait pas grand chose. On lève cette difficulté en considérant les cas par paquets et non isolément. On peut par exemple poser que la probabilité que le point tiré appartienne à une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone ; façon de dire que le tirage au sort se fait de façon homogène.

RÉVISIONS Puisque le « langage » utilisé est celui des ensembles, il vous est vivement recommandé de commencer par réviser le cours sur les ensembles.

CONSEIL Le formalisme de Kolmogorov n'est pas absolument nécessaire pour résoudre les problèmes de probabilités

rencontrés en seconde. Un bon sens vigilant devrait suffire ; comptez donc avant tout sur votre réflexion. Dans le cas fini, je ne saurais dire si ce formalisme constitue une aide ou une sorte de snobisme. Les deux à la fois, peut-être.

III. ÉVENTUALITÉ

« EXPÉRIENCE ALÉATOIRE »

On appelle « expérience aléatoire » un dispositif comprenant l'intervention du *hasard*. En gros, tout ce qui peut se raconter en terme de tirage au sort : jet de dé, lancer de pièce, tirage d'une boule « à l'aveugle » dans une urne, etc. Une « expérience aléatoire » n'est pas un concept mathématique ***stricto sensu***, puisqu'elle est censée se dérouler dans le monde réel.

ÉVENTUALITÉ

Chaque résultat possible d'une « expérience aléatoire » peut se nommer : **résultat** ; **cas** ; **possibilité** ; **cas possible** ; **éventualité** ; **issue**. Ces termes sont tous considérés comme synonymes.

UNIVERS L'*ensemble* de <u>toutes</u> les *issues* se nomme pompeusement **univers** (ou « univers des possibles »). On le note souvent Ω (« oméga »).

ÉTIQUETAGE

Chaque *cas possible* est ainsi représenté mathématiquement par un élément de cet ensemble Ω. Ces éléments peuvent être des nombres, des couples de nombres, ou n'importe quel objet mathématique. Parfois, on se contente de représenter chaque cas par une notation qui joue un simple rôle d'étiquette, sans trop se demander quelle est sa nature mathématique. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie, on pourra poser :

$\Omega = \{P;F\}$. Où « P » représente Pile et « F » Face.

Si l'on jette un dé cubique classique, on pourra poser : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, où chaque élément de Ω représente le numéro de la face supérieure.

MODÉLISATION

Mais le nombre de *cas possibles* dépend du regard porté sur l'expérience. Lorsqu'on jette un dé, on a l'habitude de s'intéresser à la face supérieure et ainsi de dénombrer 6 cas. On pourrait aussi prendre en considération l'orientation du dé ou encore l'endroit où il tombe.

Si l'on jette deux dés, selon qu'on s'intéresse seulement à la somme des points ou bien séparément aux deux numéros sortis ; selon que l'on distingue ou non les deux dés, on ne dénombrera pas le même nombre de cas.

La façon dont on choisit de différencier les cas, de les représenter, de mathématiser une « expérience » réelle, n'est pas, à proprement parler, une activité purement mathématique. On peut dire qu'au commencement de beaucoup d'exercices de probabilité du lycée, on réalise un travail qui relève en quelque sorte de la physique.

IV. ÉVÉNEMENT

DÉFINITION

Lorsqu'on s'intéresse au résultat d'une expérience aléatoire, on ne considère pas toujours les éventualités isolément. On pourra par exemple se demander quelle est la probabilité pour qu'un dé « tombe sur un numéro pair ». Si on a distingué 6 cas en posant : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, l'affirmation « le dé tombe sur un numéro pair » décrit le regroupement de 3 cas. En termes ensemblistes, on l'écrit : $\{2;4;6\}$. C'est cela qu'on appelle un **événement** :

> Un **événement** est un ensemble d'éventualités.

DISTINCTION

Il faut faire l'effort de distinguer le mot *événement*, des mots *éventualité*, *issue*, *cas*, etc. Cette distinction pourra à juste titre vous sembler artificielle, car après tout, on aurait pu, sans faire injure à leurs sens courants, permuter les significations mathématiques des mots « événement » et « éventualité ».

DÉSCRIPTION

Chaque événement peut être décrit *en compréhension*, c'est-à-dire par une affirmation portant sur le résultat de l'expérience aléatoire ou *en extension*, par la 'liste' des éventualités qu'il contient[5]. Par exemple, en reprenant le lancer d'un dé cubique, avec $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, on a :

[5] Pour qu'on puisse décrire un événement en extension, il faut qu'il ne contienne qu'un nombre fini d'éléments.

En compréhension	En extension
A : « Il sort un numéro pair »	$A=\{2;4;6\}$
B : « Il sort un numéro strictement inférieur à 3 »	$B=\{1;2\}$

Rappelons qu'il est vivement conseillé de réviser le chapitre *Les Ensembles*.

V. PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

PRINCIPE

Le degré de certitude qu'un événement advienne est représentée par un *nombre réel* appartenant à l'intervalle $[0;1]$. C'est ce nombre qu'on appelle la **probabilité** de l'événement en question. L'impossibilité prend pour valeur 0 et la certitude[6] prend pour valeur 1. Chaque degré intermédiaire entre l'impossible et le certain est donc représenté par un réel entre 0 et 1 :

« Une chance sur deux » sera représenté par le nombre $\frac{1}{2}$.

« 75% des chances sera représenté par le rapport $\frac{75}{100}$, qui n'est autre que le nombre réel $0,75$.

PROBLÉMATIQUE

Il pourra être difficile, à qui aborde les probabilités, d'accepter de quantifier ainsi l'incertitude avec une si parfaite précision ; d'admettre qu'on puisse attribuer à un événement futur et incertain un *degré de certitude* qui soit, lui, certain. L'esprit peut rechigner à découper la certitude en parts d'incertitude, à considérer la certitude comme une unité **sécable**. Les jeux de hasard, pourtant, ont le mérite de nous accoutumer à l'idée que le hasard n'est pas le chaos et qu'il obéit à des règles. Lorsqu'il lui faut choisir une tactique, lorsqu'il lui faut *miser* une certaine somme (s'il s'agit en plus d'un jeu d'argent), le joueur tente d'évaluer ses chances à partir

[6] Lorsqu'il y a une infinité de cas, chaque cas a généralement une probabilité nulle d'advenir (une chance sur une infinité). On ne dira pas pour autant que ces cas sont *impossibles*, car l'un d'eux advient forcément. C'est pourquoi un événement de probabilité nulle sera dit *presque impossible* ou *quasi impossible* et un événement dont la probabilité est égale à 1 sera dit *presque certain* ou *quasi certain*.

de certitudes partielles dont il dispose. C'est un argument que Blaise Pascal, célèbre mathématicien et philosophe du XVII^e^ siècle met en avant :

> **Tout joueur hasarde avec certitude pour gagner avec incertitude, et néanmoins il hasarde certainement (…) pour gagner incertainement (…) sans pécher contre la raison.**[7]

Pascal est généralement considéré (avec Fermat) comme le père de la théorie des probabilités, même s'il n'utilise pas cette expression. Il parle de *Géométrie du hasard* (par « géométrie », il faut entendre les mathématiques en général) :

> **(…) ce hasard qui était rebelle à l'expérimentation n'a pu échapper à l'empire de la raison. Car nous l'avons réduit en art par le moyen de la géométrie si sûrement que, rendu participant à la certitude de celle-ci, cet art progresse désormais avec audace ; et en joignant ainsi les démonstrations des mathématiques à l'incertitude du hasard, et en conciliant ce qui paraît contraire, prenant sa dénomination des deux, il s'arroge à bon droit ce titre stupéfiant : Géométrie du hasard.**[8]

FRÉQUENCE Lorsqu'on répète une même expérience aléatoire un certain nombre de fois, on peut, pour un événement donné calculer sa **fréquence**. Cette *fréquence* s'obtient en divisant le nombre de fois que l'événement a été réalisé par le nombre de fois qu'on a fait l'expérience. Plus l'événement aura été *fréquent*, plus sa fréquence se rapprochera de 1. Lorsqu'on répète

[7] Pascal, *Pensées*. Fragment 397 dans l'édition de La Pléiade. Il s'agit du fragment célèbre du *pari de Pascal*.
[8] Pascal. *Projet de lettre dédicatoire* À la très illustre Académie parisienne de mathématiques. Pléiade, vol. I, p169. Traduit du latin. « Géométrie du hasard » se dit en latin : *Aleae geometria*.

l'expérience un très grand nombre de fois, la *fréquence* se rapproche de la *probabilité*. Par exemple, lorsqu'on tire à *pile* ou *face* un très grand nombre de fois, il y a de bonnes chances pour que *pile* arrive avec une fréquence d'environ 50 %.

VI. ÉQUIPROBABILITÉ

PRINCIPE Dans un premier temps, on essayera de modéliser les « expériences aléatoires » (autrement dit de choisir l'*univers*) de façon à nous placer en situation d'**équiprobabilité**, c'est-à-dire où toutes les éventualités ont la même chance d'advenir. Alors, la probabilité d'un événement s'obtiendra très simplement en en faisant « le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles »[9], c'est-à-dire en divisant le nombre de cas composant cet événement par le nombre de tous les cas possibles.

Par exemple, si l'on jette un dé cubique bien équilibré, chaque face a la même probabilité de sortir. On est donc bien en situation d'*équiprobabilité*. La probabilité d'obtenir un nombre différent de 6 est de $\frac{5}{6}$, parce que ça fait 5 cas sur 6.

Dans de telles situations, le calcul d'une probabilité se ramène à un problème de *dénombrement*.

[9] La place. dans sa *Théorie analytique des probabilités*, en fait même une définition.

RÉCAPITULATIF

> En situation d'<u>équiprobabilité</u>, la probabilité d'un événement est le rapport du « nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles » : $\boxed{P(E)=\dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}}$

COMMENTAIRES

Ce résultat sera repris plus loin dans un cadre plus large. Il constituera alors un théorème.

Si vous vous demandez ce que signifie « $Card(E)$ », c'est que vous n'avez pas assez bien révisé le chapitre sur les ensembles.

CRITÈRES

Comment savoir s'il y a équiprobabilité ?

HYPOTHÈSE

Souvent, l'équiprobabilité est tout simplement supposée, de façon plus ou moins tacite. Ainsi, lorsque l'énoncé parle de pièce « non truquée », de dé « non pipé » ou « bien équilibré », de boules « indiscernables au toucher », c'est une façon conventionnelle de dire qu'on suppose l'équiprobabilité. Lors de la résolution de l'exercice, on ne cherchera pas à démontrer cette équiprobabilité. On se contentera faire savoir qu'on l'utilise, en disant par exemple : « puisqu'il y a équiprobabilité… ».

INDÉPENDANCE

Si l'on combine deux expériences équiprobables alors, à condition qu'elles soient indépendantes l'une de l'autre et que l'on distingue bien tous les cas, on conserve l'équiprobabilité.

Par *distinguer tous les cas*, on entend qu'on représente chaque issue par un couple dont chaque terme indique l'un des résultats. Pour se placer en situation d'équiprobabilité, on ne craint pas de récolter « un peu trop » d'information en distinguant, artificiellement s'il le faut, les tirages, les dés, les boules d'une même couleur (même dites « indiscernables »). Par exemple, si on lance deux dés, pour se placer en situation d'équiprobabilité, il faudra d'abord, bien évidemment, supposer que les dés sont chacun bien équilibrés, mais ensuite, considérer les numéros séparément (plutôt que leur somme, par exemple) et distinguer les deux dés, comme s'ils avaient des couleurs différentes.

VII. OPÉRATIONS

Reprenons l'exemple précédent du dé, avec les deux événements A et B du paragraphe IV :

A : « Il sort un numéro pair »	$A=\{2;4;6\}$
B : « Il sort un numéro strictement inférieur à 3 »	$B=\{1;2\}$

ET

L'événement « A **et** B » peut alors se formuler : « Il sort un numéro qui est à la fois pair et strictement inférieur à 3 ». Dans l'exemple qui nous occupe, il n'y a en fait qu'une seule possibilité pour que cet événement advienne : il faut que le numéro qui sorte soit le 2.

En extension, l'événement s'écrit donc : $\{2\}$

D'un point de vue ensembliste, c'est $\boxed{A \cap B}$ (« *A inter B* »)

OU L'événement « A **ou** B » peut se formuler : « il sort un numéro qui est inférieur strictement à 3, ou pair, ou les deux »[10].

L'événement « A **ou** B », ici, s'écrit en extension : $\{1;2;4;6\}$.

C'est en fait $\boxed{A \cup B}$. (« *A union B* »)

NON L'événement **contraire** de A, dit « **non** A », qui peut ici se formuler : « il sort un numéro impair », s'écrit en extension : $\{1;3;5\}$.

C'est en fait $\Omega \setminus A$ (« oméga privé de A »). On parle aussi du *complémentaire* de A (dans Ω), que l'on peut noter (la référence à Ω étant implicite) : $\boxed{\overline{A}}$ (« *non A* » ou « *complémentaire de A*).

INCOMPATIBILITÉ

Deux événement E et F sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent en aucun cas être tous deux réalisés. En termes ensemblistes, cela revient à dire qu'ils sont **disjoints**, c'est-à-dire que $E \cap F = \varnothing$. (L'incompatibilité n'est pas une *opération*, mais une *relation*.)

Les deux événements A et B de l'exemple sont *compatibles*, puisqu'ils ont en commun la possibilité que 2 sorte.

[10] On précise « ou les deux » pour rappeler que le « ou » mathématique est *inclusif* : c'est un « *ou* ou *et* ». Il s'oppose au « ou » *exclusif*. Voir *Révisions d'Algèbre*, à la fin du paragraphe sur les quotients.

VIII. AXIOMES

PRINCIPE À chaque événement correspond une certaine probabilité que cet événement advienne. La fonction, généralement notée P, qui, à tout événement, associe sa probabilité, est appelée **loi de probabilité**. Ainsi, la probabilité d'un événement E se note « $P(E)$ ».

On demande à une loi de probabilité de vérifier quelques conditions élémentaires que nous nous autorisons (à l'instar de Kolmogorov) à appeler "axiomes", même si elles sont en réalité formulées dans le cadre d'une définition.

DÉFINITION Soit Ω un ensemble non vide. Soit P une fonction qui, à chaque *événement* associe un réel. P est appelée **loi de probabilité** (sur Ω) lorsqu'elle vérifie les trois "axiomes" suivants :

- Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Quels que soient les événements A et B : si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité)

COMMENTAIRE

Cette définition est une version simplifiée pour le lycée. La définition complète réclame notamment une condition plus forte que l'additivité, nommée *sigma-additivité*.

APPLICATION AUX PROBABILITÉ FINIES

Lorsque le nombre de cas possibles est fini, ce qui est toujours le cas en seconde, on peut considérer isolément la probabilité de chaque éventualité. La probabilité d'un événement s'obtient alors en additionnant les probabilités de chacune des *éventualités* qui le composent :

THÉORÈME

Considérons un univers Ω fini et une loi de probabilité P sur cet univers. Soit E un événement de Ω. En posant n = Card(Ω) et p = Card(E), on peut noter e_1 ; e_2 ; … ; e_n les éventualités, de façon que $E=\{e_1;e_2;...;e_p\}$, avec bien entendu : $\Omega=\{e_1;e_2;...;e_n\}$. On écrira $P(e_1)$ pour signifier $P(\{e_1\})$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacune de ses éventualités : $P(E)=P(e_1)+P(e_2)+...+P(e_p)$.

DÉMONSTRATION

Par *additivité*, les « événements élémentaires » que sont les éventualités étant incompatibles deux à deux.

COMMENTAIRE

Pour définir une loi de probabilité dans le cas fini, il suffit donc d'attribuer une probabilité à chaque éventualité. La seule condition à satisfaire est que la somme de toutes ces probabilités soit égale à 1.

CAS DE L'ÉQUIPROBABILITÉ

DÉFINITION

Lorsqu'il y a un nombre fini d'éventualités et qu'elles ont toutes la même probabilité d'advenir, on parle d'**équiprobabilité**.

THÉORÈME

En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est le rapport du « nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles ». Si l'on note l'univers Ω et E un événement, on a : $\boxed{P(E)=\dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}}$

DÉMONSTRATION

On reprend les notations du paragraphe précédent.

Puisque $P(\Omega)=P(e_1)+P(e_2)+...+P(e_n)$, on a :

$$1=\underbrace{P(e_1)+P(e_1)+...+P(e_1)}_{n \text{ termes}}$$

Donc : $1=n\times P(e_1)$

Donc : $P(e_1)=\dfrac{1}{n}$ et donc :

$$P(e_1)=P(e_2)=...=P(e_n)=\frac{1}{n}$$

Alors : $P(E)=P(e_1)+P(e_2)+...+P(e_p)$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{p \text{ termes}}=p\times\frac{1}{n}=\frac{p}{n}$$

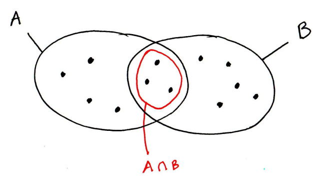
$$\boxed{P(E)=\frac{Card(E)}{Card(\Omega)}}$$

IX. Théorèmes

Questions

Si l'on vous dit qu'un événement a 1 chance sur 3 d'advenir, quelle est la probabilité pour qu'il n'advienne pas ? (Réfléchissez avant de regarder la suite.)

La probabilité de $A \cup B$ est égale à $P(A)+P(B)$ lorsque A et B sont disjoints. Mais si A et B ont des éléments en commun, leur probabilité aura été comptée deux fois : une fois avec $P(A)$ et une fois avec $P(B)$:



Comment, alors, compléter la formule de façon à corriger cet excédent ? $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-$ ... (Réfléchissez avant de regarder la réponse.)

Réponses

Si un événement E a pour probabilité $\frac{1}{3}$, la probabilité de $\overline{E}$, c'est-à-dire la probabilité que E ne soit pas réalisé à l'issue de l'expérience est de $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire $1-\frac{1}{3}$.

Si A et B ont des éléments en commun, leur probabilité a été comptée deux fois, c'est-à-dire une fois de trop. Il faut donc soustraire cet excès, qui s'écrit $P(A \cap B)$. Ce qui donne :

$P(A \cup B) = P(A)+P(B) - \boldsymbol{P(A \cap B)}$

Lors du chapitre sur les ensembles, nous avons rencontré, en

exercice une relation similaire :

$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A \cap B)$.

La loi de probabilité, notée ici P, fonctionne en effet un peu comme l'opérateur Card : c'est comme si, au lieu de compter chaque élément pour 1, elle comptait leur « poids » en probabilité.

Théorèmes

Quels que soient les événements A et B :

- Si $A \subset B$ alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ (1)
- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ (2)
- $\boxed{P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)}$ (3)

Corollaire

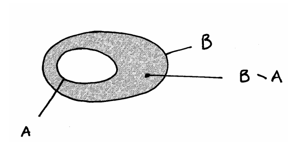
De (2), il vient que $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

Démonstrations

(1) A et $B \setminus A$ étant disjoints, par additivité :

$P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$ (**e**)

Or, A étant inclus dans B, on a : $A \cup (B \setminus A) = B$



Donc l'égalité (**e**) s'écrit :

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$P(B) - \boldsymbol{P(A)} = P(A) + P(B \setminus A) - \boldsymbol{P(A)}$

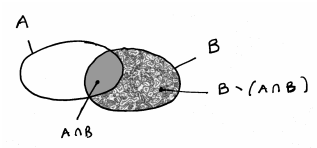
$P(B) - P(A) = P(B \setminus A)$

(2) On applique (1) en posant : $B = \Omega$.

(3) A et $B \setminus (A \cap B)$ étant disjoints, par additivité :

$$P\left(A \cup [B \setminus (A \cap B)]\right) = P(A) + P\left(B \setminus (A \cap B)\right)$$

Or $A \cup [B \setminus (A \cap B)] = A \cup B$



Donc : $P(A \cup B) = P(A) + P\left(B \setminus (A \cap B)\right)$

Puis, par (1) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

X. Simulation

Principe

La calculatrice peut simuler un tirage au sort. Ce n'est qu'une simulation, et non du vrai hasard. Les nombres entiers sont obtenus à partir de valeurs décimales successives, qui sont en fait calculées, chacune en fonction de la précédente, selon un processus de calcul suffisamment compliqué pour ressembler au hasard. Sur un ordinateur, l'horloge interne est parfois utilisée. Pour avoir du vrai hasard, il faudrait utiliser un appareil qui capte des informations au niveau des particules élémentaires. C'est possible, par exemple, avec certains capteurs photo de téléphone portable[11], qui peuvent détecter les photons un par un.

Valeur entière aléatoire

Nous n'utiliserons que la fonction enAléat(,), qui se trouve dans le menu (math)/PRB, (PRB pour PRoBabilités) :

entAléat(*valeur minimale* , *valeur maximale*)

[11] Selon un article scientifique publié en mai 2014. arXiv:1405.0435

Cette fonction tire au sort un entier. Par exemple entAléat(1 , 6) tire au sort, de façon équiprobable, un entier entre 1 et 6 (inclus). Comme un dé, quoi. Si l'on tape « entAléat(1 , 6) (entrer)(entrer)(entrer) », on obtient trois entiers successifs :

On peut bien entendu inclure cette fonction dans un programme.

XI. Arbres

Épreuves

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée de plusieurs tirages au sort, chacun de ces tirages au sort s'appelle une **épreuve**. Une *épreuve* est donc une expérience aléatoire élémentaire qui fait partie d'une expérience aléatoire plus large. Nous allons considérer le cas de deux *épreuves* successives. Les conditions dans lesquelles se déroulent la seconde épreuve peuvent dépendre du résultat de la première. Nous allons voir cela sur un exemple.

Urnes

Un exemple couramment utilisé est celui de tirages dans une urne. On considère une *urne* (un récipient opaque, disons), dans laquelle se trouvent des boules de couleurs différentes, mais de même taille, « indiscernables au toucher », façon de dire qu'elles ont toutes la même chance d'être tirées.

Nous allons nous intéresser au cas où l'on effectue deux tirages successifs « **sans remise** » : on tire une première boule, puis une seconde, sans avoir remis la première dans l'urne. Ainsi, les conditions du second tirage dépendent du résultat du premier.

ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires. On tire deux boules successivement, *sans remise*.

La probabilité que la première boule tirée soit blanche est de $\frac{2}{5}$; et la probabilité qu'elle soit noire est de $\frac{3}{5}$.

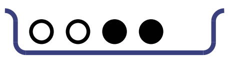
SI LA PREMIÈRE BOULE TIRÉE EST BLANCHE…

… alors il reste une blanche et trois noires :

Donc la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche, <u>sachant que le première est blanche</u> est de $\frac{1}{4}$. Et la probabilité que la deuxième soit noire <u>sachant que la première est blanche</u> est de $\frac{3}{4}$.

SI LA PREMIÈRE BOULE TIRÉE EST NOIRE…

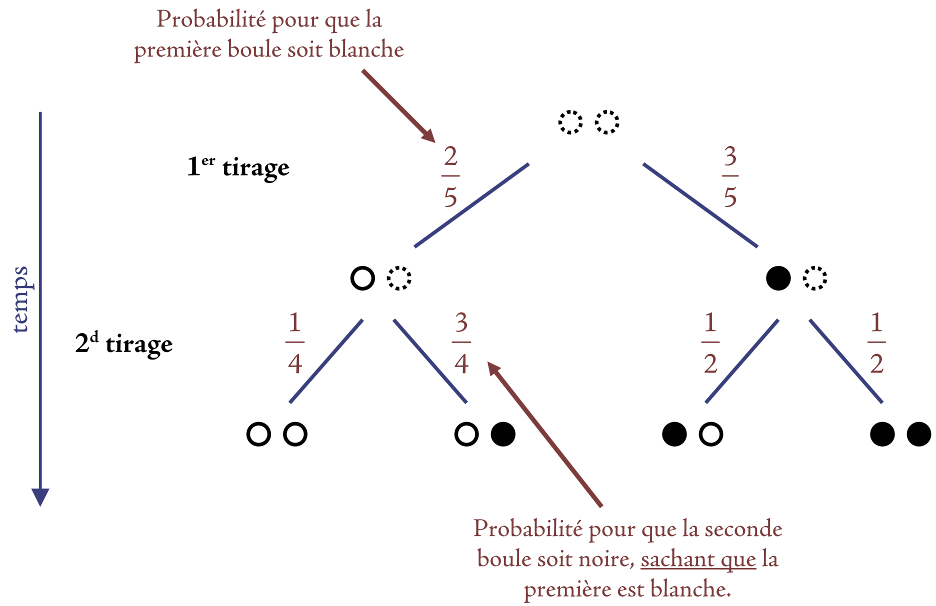
… alors il reste deux blanches et deux noires :



Donc la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche, <u>sachant que la première est noire</u> est de $\frac{1}{2}$. Et la probabilité que la

deuxième soit noire <u>sachant que la première est noire</u> est aussi de $\frac{1}{2}$.

On peut représenter toutes ces possibilités sur un « arbre ». Lorsque la couleur de la boule est encore indéterminée, nous l'avons représentée en pointillés :

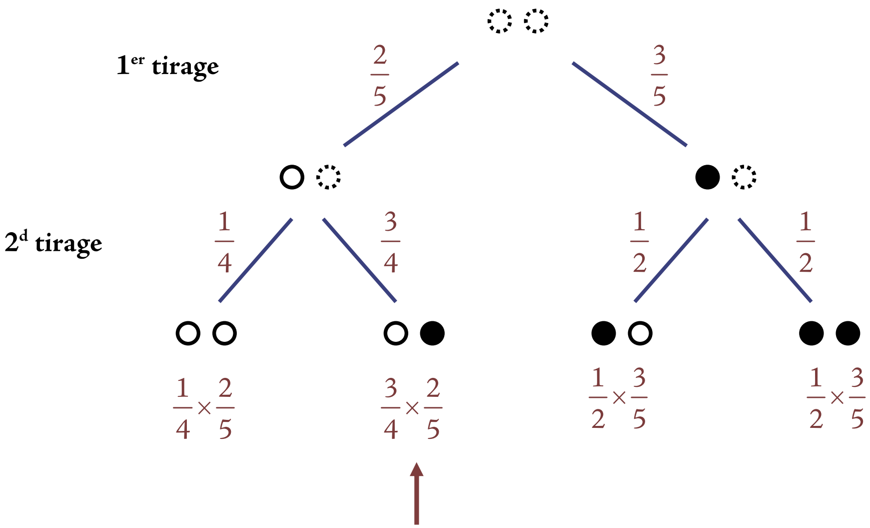


QUESTION

La question qui va nous occuper à présent sera de déduire de ces informations la probabilité, selon un observateur placé temporellement au début de l'expérience, pour que la première boule soit blanche <u>et</u> que la seconde soit noire. (Réfléchissez-y posément avant de lire la suite.)

RÉPONSE

Imaginons qu'on réalise l'*expérience* un très grand nombre de fois. Alors, dans à peu près $\frac{2}{5}$ des cas, la première boule sera blanche. Et <u>parmi ces cas-là</u>, il y en aura $\frac{3}{4}$ où la seconde sera noire. Donc, la première sera blanche <u>et</u> la seconde noire, dans $\frac{3}{4}$ <u>de</u> $\frac{2}{5}$ des cas. Or $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$, c'est $\frac{3}{4}$ fois $\frac{2}{5}$. Il faut donc <u>multiplier</u> les probabilités des branches de l'arbre qui mènent au cas considéré. Il en est ainsi pour chaque « feuille » de l'arbre :



Probabilité pour que la première boule soit blanche, puis la seconde noire.

XII. GLOSSAIRE

finalité — But, fin. (Ou caractère de ce qui tend vers un but.)

contingent — En philosophie : qui peut se produire ou non, qui peut être ou ne pas être ; accidentel, **fortuit**. Contingent s'oppose alors à *nécessaire*. Est *nécessaire* ce qui ne peut pas ne pas arriver.
Dans un sens plus courant, *contingent* signifie « sans importance ».

fortuit — Qui arrive par hasard. Du latin *fors* : « sort, hasard ». Même origine que « fortune ».

métaphysique — Littéralement, « après la physique ». Titre donné au Ier siècle aux livres d'Aristote qui suivent ceux sur la physique. A pris le sens de « au-delà de la physique ». Étude des causes de l'univers, de l'être en soi…

libre arbitre — Liberté humaine. Faculté qu'aurait l'être humain d'agir et de penser librement, par lui seul.

formalisme — Fait de mettre l'accent sur la forme, plutôt que sur le fond.
En mathématiques, présentation dans une langue de symboles abstraits qui rend compte de la structure, en excluant l'intuition. L'idée est de réduire la sémantique à la syntaxe.

stricto sensu — Locution latine qui signifie : « au sens strict ».

sécable — Qu'on peut couper. Du latin *secare* : « couper ».